Автор:
Красюк Данил Владимирович
ученик 9 класса
Руководитель:

Лаврентьева Светлана Владимировна

учитель физики и географии

Муниципальное казённое общеобразовательное учреждение Новосибирского района Новосибирской области –
Плотниковская средняя общеобразовательная школа № 111

ИССЛЕДОВАНИЕ ПАРАДОКСАЛЬНЫХ СВОЙСТВ БРАХИСТОХРОНЫ

... после прямой и окружности нет более часто встречающейся линии.

Блез Паскаль

Все дети, да и многие взрослые любят кататься с горки. Но вряд ли кто-то задумывался над вопросом: зависит ли скорость спуска от того, какой формы горка? И какой формы должна быть горка, чтобы добиться самой большой средней скорости спуска, то есть проехать по всей длине горки за самое короткое время? Казалось бы, ответ простой: горка должна быть прямой, так как это самое кратчайшее расстояние между двумя точками, а значит, и самый быстрый путь. Удивительно, но это не так.

В школьных курсах математики и физики из плоских кривых линий изучаются парабола, гипербола, эллипс, синусоида.

Но есть среди таких линий особенная, обладающая, на первый взгляд, парадоксальными свойствами линия. Она называется циклоидой или брахистохроной.

Брахистохрона на данный момент недостаточно изучена. Область ее применения широка, её свойства применяются и в физике, и в математике, и в астрономии. Циклоидальный космический перелет всего на 20% дольше, чем прямолинейный, но его достоинства настолько велики, что, возможно, именно он будет использоваться в ближайшем будущем.

На практике брахистохроны используются в технике для сокращения времени получения требуемых результатов работ. Форму брахистохроны можно использовать в производстве для сокращения времени по доставке грузов и материалов. Нужная форма направляющих может значительно ускорить доставку, тем самым повысить эффективность. Например, на элеваторах, чтобы ускорить подачу зерна. В спорте для построения горнолыжных и бобслейных трасс с наибольшим разгоном. В аварийно-спасательным деле, для создания различных трапов, которые используются в самолетах и пожарными для эвакуации людей.

Цель проекта – исследовать и описать основные свойства брахистохроны.

Объектом исследования является плоская кривая – брахистохрона.

Предметом исследования является свойства брахистохроны.

Задачи исследования:

- Максимальный сбор источников информации по выбранной теме.
- Научиться строить брахистохрону.
- Проектирование, конструирование и испытание установки, демонстрирующей свойства брахистохроны.
- Описание на основе проведённых опытов свойств брахистохроны.

Гипотеза исследования состоит в том, время спуска предмета по прямой траектории будет больше, чем время спуска по брахистохроне.

Теоретическая значимость работы заключается в расширении и углублении знаний о плоских кривых.

Практическая значимость исследования в том, что созданный нами макет может быть использован для демонстрационного эксперимента на уроках математики и физики.

Основные **методы** исследования – проектирование, конструирование и эксперимент.

Часть 1.

1.1. История возникновения брахистохроны

История о кривой наискорейшего спуска имеет давнее происхождение. Еще Галилео Галилей (1564-1642) первым заметил эту кривую, «так часто вычерчивающуюся перед глазами каждого» и предложил назвать ее **циклоидой** (от греческого «циклос» круглый), то есть происходящая от круга. Одновременно во Франции математик, физик, философ Марен Мерсенн провел содержательное исследование циклоиды (1588-1648) и назвал ее – **рулеттой**. Первым в России из учёных обратил внимание на циклоиду Николай Кузанский в XV веке, но серьёзное исследование этой кривой началось только в XVII веке.

Новая кривая быстро завоевала популярность и подверглась глубокому анализу, в котором участвовали Декарт, Ферма, Ньютон, Лейбниц, братья Бернулли и другие ученые XVII—XVIII веков. На циклоиде активно оттачивались методы появившегося в те годы математического анализа. XVII век – это век циклоиды. Лучшие ученые изучали её удивительные свойства[1].

Циклоида – это кривая, которую описывает точка, закреплённая на окружности, катящейся без скольжения по прямой линии (Рис. 1).

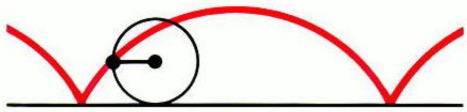


Рис.1. Циклоида

Эта кривая обладает свойством периодичности, то есть повторяется через определенный промежуток. Элементы циклоиды показаны на рисунке 2.

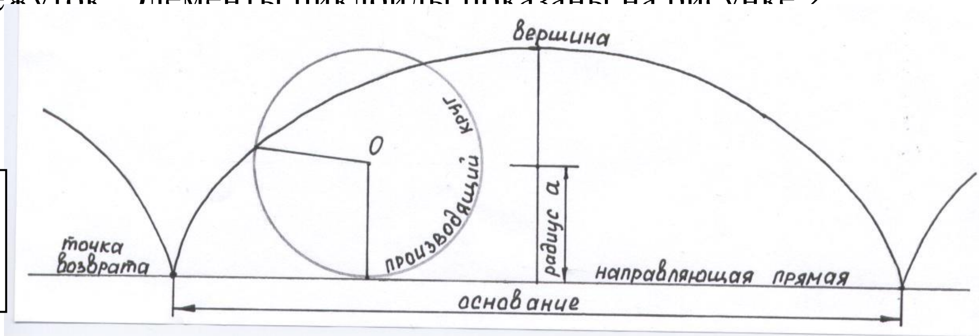
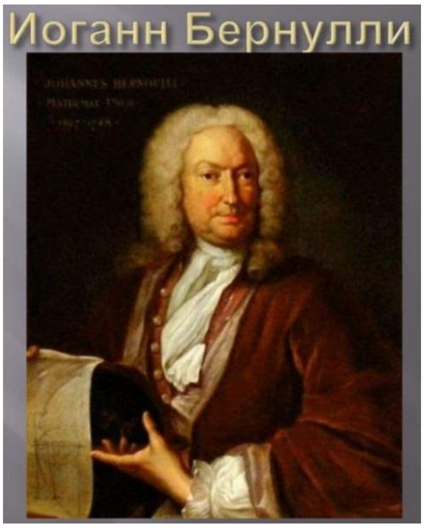


Рис. 2. Элементы циклоиды. Изображена одна арка.

Перевёрнутую циклоиду Иоганн Бернулли назвал **брахистохроной.**

1.2.Задача Бернулли

В XVII веке и позже многие ученые возвращались к теме изучения брахистохроны, но впервые строго математически описал эту кривую швейцарский математик Иоганн Бернулли (1700-1782) в статье 1696 года с названием «Новейшая проблема предлагается математикам для решения».



В ней была предложена задача о «перевернутой» циклоиде - брахистохроне, которая является кривой наискорейшего спуска (от греческого «брахистос» – кратчайший и «хронос» – время).

Бернулли так сформулировал задачу: «В вертикальной плоскости даны две точки A и B, не лежащие на одной вертикальной оси. Определить кривую,

спускаясь по которой под влиянием собственной тяжести, материальная точка, начав двигаться из точки A, дойдет до точки B за кратчайшее время» (Рис.3) [2].

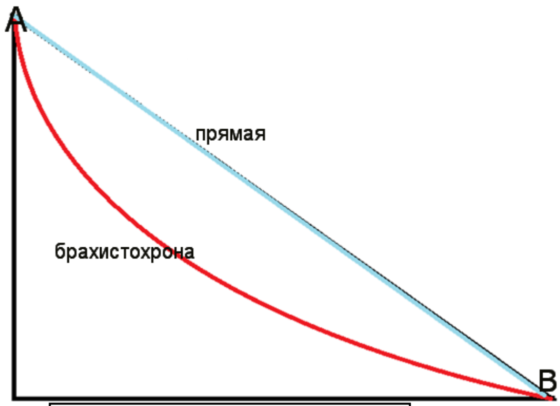


Рис.3. Брахистохрона

Искомая кривая и есть брахистохрона – траектория скорейшего спуска. С этой задачей по истечении года справились только великие математики 17-го - 18-го веков: Лейбниц, Ньютон, Лопиталь, сам Иоганн Бернулли и его брат Якоб.

И все пришли к одному и тому же выводу: брахистохроной является циклоида [5].

Задача о брахистохроне привела к изобретению вариационного исчисления – раздела математики, который в то время еще не был создан.

1.3.Таутохрона

Брахистохрона обладает свойством таутохронности (от греческого «таутос» – тот же самый, «хронос» – время, то есть «одновременность»). Это свойство открыл знаменитый голландский ученый XVII века Христиан Гюйгенс.

Французский математик и физик Марен Мерсенн присылал Христиану Гюйгенсу интересные задачи. Из его писем тот познакомился с циклоидой из задачи Бернулли и доказал таутохронность движения точки по циклоиде.

Если одинаковые тела начинают спуск по брахистохроне с разных высот, то они придут в вершину брахистохроны одновременно. В этом и заключается её таутохронность (Рис.4).

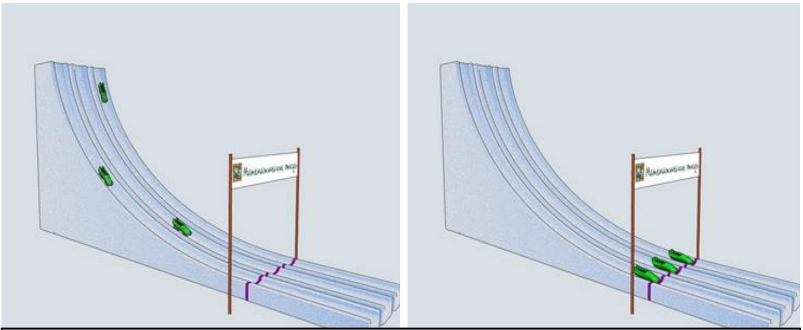
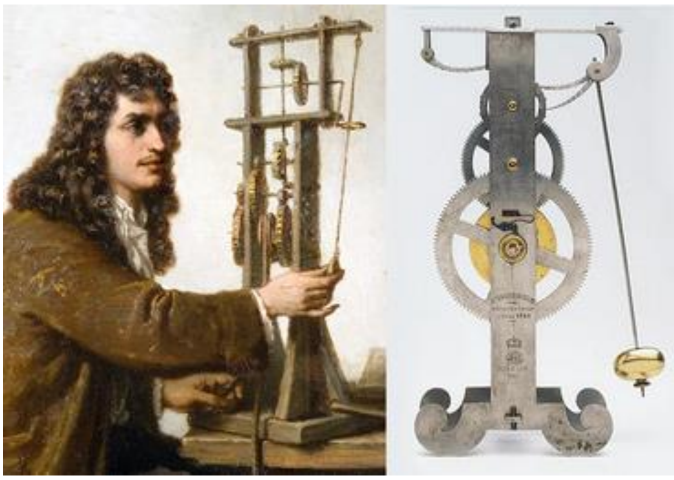


Рис.4.Старт с разных высот и одновременный финиш

Гюйгенс использовал маятник в создании первой модели часов. Маятник двигался по циклоиде и под влиянием собственной тяжести, будучи помещенным в любую точку арки циклоиды, достигал положения равновесия за одно и то же время, что подтверждает таутохронность циклоиды [3].



Часы Гюйгенса с циклоидальным маятником

Глава 2. Практическая часть

2.1. Построение брахистохроны (циклоиды)

Построить циклоиду можно с помощью окружности, катящейся по неподвижной прямой. Из толстого картона мы вырезали круг диаметром, равным высоте нашего стенда. На край листа ватмана положили метровую линейку – это была неподвижная прямая направляющая. На линейку-направляющую установили картонный круг, в котором сделали небольшое отверстие с краю. В это отверстие поставили фломастер. Когда круг катили по направляющей, фломастер на ватмане вычерчивал циклоиду (Рис.5).

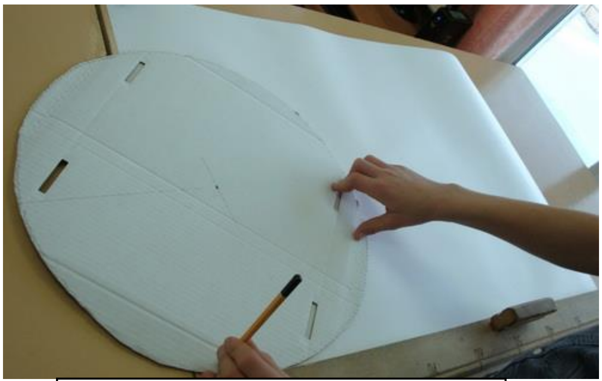
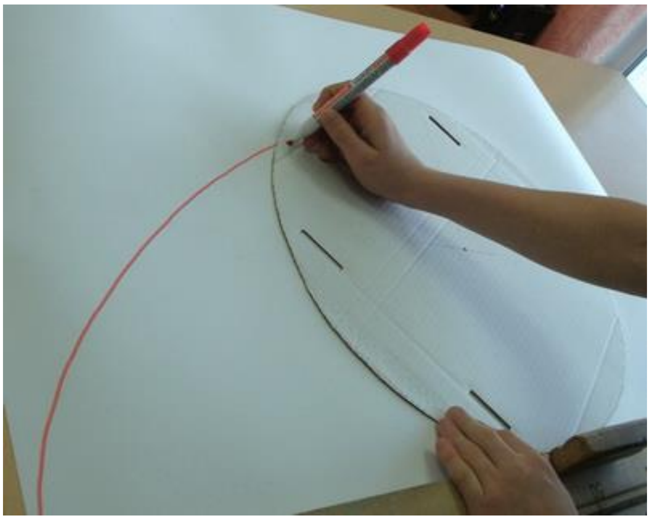


Рис.5. Построение циклоиды



2.2. Установка для демонстрации свойств брахистохроны

Мы сконструировали установку для демонстрации свойств брахистохроны из двух деревянных брусков, скрепив их под прямым углом. К брускам прикрепили стенку из плотного картона.

Построенную циклоиду в перевёрнутом виде мы скопировали на стенку нашего макета, получили брахистохрону.

Рис.6. Установка для демонстрации свойств брахистохроны

Приклеили кабель-каналы вдоль начерченной брахистохроны и один кабель-канал прикрепили так, чтобы он остался прямолинейным. Получили три трека для шариков: один прямой и два – по брахистохроне (Рис.6).

2.3. Эксперименты по изучению свойств брахистохроны

Кривая скорейшего спуска

С помощью модели с прямым спуском и по двум одинаковым брахистохронам мы провели эксперименты. Взяв одинаковые шарики, установив их в верхней точке, один – на прямом жёлобе, а другой – на жёлобе в форме брахистохроны, одновременно отпускали. Шарик, двигающийся по брахистохроне под влиянием собственной тяжести, достигает финиша раньше (Рис.7). Крутой спуск циклоиды дает дополнительное ускорение, обеспечивая тем самым достижение нижней точки за кратчайшие время. Так мы доказываем брахистохронность циклоиды.

Мы снимали процесс спуска шариков на видео, а затем выделили несколько последовательных кадров с различным положением шариков.

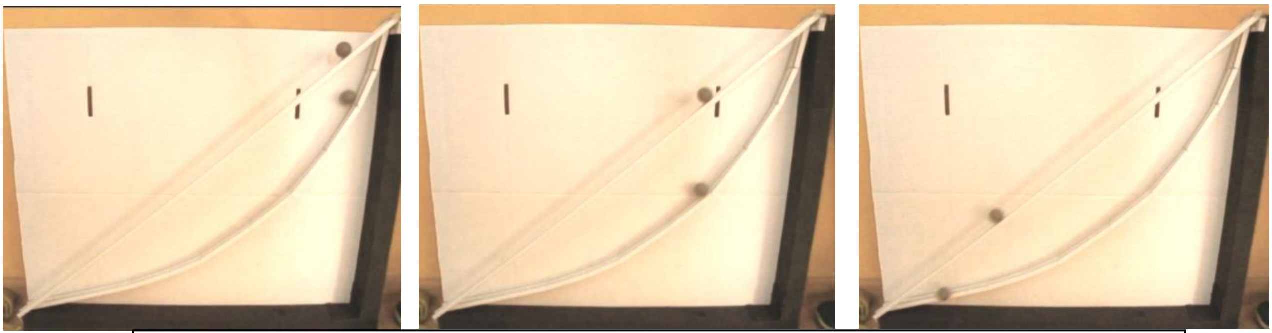


Рис.7. Шарик, скатывающийся по брахистохроне приходит к финишу первым

В ходе работы над проектом **подтвердилась гипотеза**. При изучении циклоидальных кривых и их свойств можно объяснить парадоксальные на первый взгляд явления. Были выяснены основные физические свойства брахистохроны.

- Не всегда движение по линиям подчиняется только законам математики, большую роль играют и законы физики.
- Во время движения тел происходит изменение и превращение одного вида энергии в другой.
- Брахистохрона – действительно кривая скорейшего спуска: время спуска по прямой оказалось больше времени спуска по брахистохроне.

Таутохронность брахистохроны

Два шарика одновременно запускали с разной высоты по двум брахистохронам, но шарики приходили к финишу одновременно. Это доказывает таутохронность брахистохроны.

Запуск шариков с разных уровней

Шарики пришли к финишу одновременно

Заключение

В ходе работы над проектом мы познакомились с кривой, замечательной во многих отношениях. Циклоида – это и след точки обода катящегося колеса, она же – таутохронная кривая (кривая колебаний постоянного периода), она же – брахистохрона (кривая быстрейшего спуска). Научились строить брахистохрону с помощью окружности, катящейся по неподвижной прямой. Сконструировали стенд, с помощью которого продемонстрировали эксперименты с использованием прямых и кривых спусков. Убедились в том, что брахистохрона – кривая наискорейшего спуска и что движение по прямой не самый быстрый путь.

Как оказалось, циклоида имеет огромное практическое применение не только в математике, но и в физике, технологических расчетах и технике. Существует еще много интересных кривых, например, укороченные и удлинённые циклоиды, эпициклоиды, гипоциклоиды [1]. Зная их свойства, можно сконструировать новые модели, применить их на практике.

Источники информации

1. Берман Г.Н. Циклоида. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1954. http://www.mathedu.ru/lib/books/berman_tsikloida_1954/

2. Гиндикин С.Г. Рассказы о физиках и математиках. М.: МЦНМО – 4- е издание. 2006.

3. Матюхин В. Изобретатель маятниковых часов. Сайт электронной газеты «Обзор», № 1161, 2019 https://www.obzor.lt/news/n48410.html

4. Иванов А.А., Лукьянов А.А. Еще о брахистохроне и таутохроне. Физ. образ. в вузах.- М.: ООО «Издательский дом МФО», 1999г. том 5, номер 3, стр. 54-61

5. Каганов В.И. О двух великих швейцарских математиках Бернулли – Якобе и Иоганне. Сайт электронного журнала. Научно-популярный журнал для юношества «Страна знаний», № 2, 2016 https://www.krainaz.org/2016-02/102-bernoulli