Новикова Надежда Александровна
директор
Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение средняя общеобразовательная школа №13 ст. Новоджерелиевской муниципального образования Брюховецкий район
Краснодарский край Брюховецкий район, ст. Брюховецкая

ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ КВАДРАТНЫХ УРАВНЕНИЙ, СОДЕРЖАЩИХ ПАРАМЕТР

Задачи с параметрами уверенно вошли в материалы государственной итоговой аттестации и единого государственного экзамена по математике. Их решение вызывает немалые трудности у учащихся, которые могут быть объяснены отсутствием в ныне действующих учебниках четких методических указаний по решению задач данного класса.

Психологов всегда интересовал процесс усвоения знаний и умений учащимися. Как правильно организовать работу по усвоению знаний и умений учащимися? Ответить на этот вопрос позволила теория поэтапного формирования умственных действий П.Я. Гальперина.

Классно-урочная форма обучения, на наш взгляд, позволяет организовывать следующие этапы данной теории: ориентировка школьников в материале и способах работы с ним; осуществление пошагового контроля за усвоением каждого действия каждым школьником в ходе решения задачи; переход от пошагового контроля школьников к их самоконтролю [4].

Приведем примеры разработанных нами систем заданий по теме «Квадратные уравнения с параметрами» [2]. При их составлении мы руководствовались тем, что:

— число задач, входящих в систему, должно быть достаточным для организации каждого из этапов теории;

— сложность задач в системе должна нарастать постепенно;

— последовательность задач должна способствовать активному участию школьников в моделировании ориентировочной основы формируемого действия.

— Изучение данной темы необходимо начать с рассмотрения *неполных квадратных уравнений с параметрами*.

Задание 1. При всех значениях параметра *a* решить уравнения:

1) $ax^2 = 0;$

2) $(a-2)(x-1)^2 = 0;$

3) $(3-\sqrt{a})\cdot x^2 = 0;$

4) $(\sqrt{a}-5)\cdot(x-1)^2 = 0.$

Далее переходим к решению приведенных квадратных уравнений, числовое значение дискриминанта которых представляет собой квадрат целого числа.

Задание 2. При всех значениях параметра *a* решить уравнение

$x^2 + 5ax = 14a^2.$

$x^2 + 5ax - 14a^2 = 0; \quad D = 25a^2 + 56a^2 = 81a^2;$

$$x = \frac{-5a \pm \sqrt{81a^2}}{2}; \quad x = \frac{-5a \pm |9a|}{2} = \left[\begin{array}{l} -7a, \\ 2a. \end{array}\right.$$

Ответ: при всех действительных значениях параметра *a* уравнение имеет корни $x = -7a$ и $x = 2a$.

Задание 3. При всех значениях параметра *a* решить уравнения:

1) $x^2 = -6ax - 8a^2;$

2) $x^2 - 18a^2 = 3ax;$

3) $x^2 + 8ax + 7a^2 = 0;$

4) $x^2 - 15a^2 = 2ax.$

Следующим этапом решения квадратных уравнений с параметром является решение уравнений, дискриминант которых есть полный квадрат некоторого двучлена.

Задание 4. При всех значениях параметра *a* решить уравнение

$x^2 + (4-2a)x = 8a.$

$x^2+(4-2a)x-8a=0;$

$x^2+2(2-a)x-8a=0;$

$\frac{D}{4}=(2-a)^2+8a=(a+2)^2;$

$$x=(a-2)\pm[\ a+2\ ];\quad x=\left[\begin{array}{l} a-2+a+2=2a, \\ a-2-a-2=-4. \end{array}\right.$$

Ответ: при всех действительных значениях параметра *a* уравнение имеет корни $x = 2a$ и $x = -4$.

Решение вышепредставленных уравнений позволяет составить ориентировочную основу действий (ООД) для решения квадратных уравнений с параметрами данного типа.

ООД решения квадратных уравнений с параметрами

- ✓ Привести уравнение к стандартному виду.
- ✓ Найти дискриминант квадратного уравнения.
- ✓ Найти контрольное значение параметра, исследуя дискриминант.
- ✓ Найти корни уравнения при контрольном значении параметра.
- ✓ Найти корни уравнения при остальных значениях параметра.
- ✓ Заполнить развертку по параметру записать ответ.

Развертка по параметру позволяет систематизировать, обобщить и интерпретировать полученные результаты [3]. Далее учащиеся должны познакомиться с новым для них приемом решения квадратных уравнений – понижения степени. Овладевая им, учащиеся начинают понимать, что при определенных значениях параметра, квадратное уравнение приобретает статус линейного, решение которых учащимся известно [5, 6].

Задание 5. При всех значениях параметра *a* решить уравнение

$(2a-3)x^2+a+1=(3a-2)x.$

Для решения данного уравнения воспользуемся приемом понижения степени. Приравняем к нулю коэффициент при x^2 и найдем значение параметра *a*, при котором квадратное уравнение превращается в линейное:

$2a-3=0;\quad a=1{,}5.$

При a = 1,5 исходное уравнение принимает вид

$$-(3\cdot 1{,}5-2)x+1{,}5+1=0,$$

откуда x = 1.

Найдем корни уравнения

$$(2a-3)x^2-(3a-2)x+a+1=0$$

для всех $a \neq 0$:

$$D=(3a-2)^2-4(2a-3)(a+1);$$

$$D=a^2-8a+15;\quad D=(a-4)^2;$$

$$x=\frac{(3a-2)\pm\sqrt{D}}{2(2a-3)}.$$

Анализируя значения дискриминанта, получаем контрольное значение параметра a = 4. Для a = 4 исходное уравнение имеет корень четной кратности x = 1.

Если $a \neq 1{,}5$ и $a \neq 4$, то

$$x=\frac{(3a-2)\pm\sqrt{(a-4)^2}}{2(2a-3)}=\frac{(3a-2)\pm|a-4|}{2(2a-3)}=\left[\begin{array}{l}1,\\ \frac{a+1}{2a-3}\end{array}\right.$$

Ответ: a = 1,5; a = 4: x = 1; $a \neq 1{,}5$ $a \neq 4$: x = 1, $x=\dfrac{a+1}{2a-3}$.

Если при решении задания 5 дискриминант представлял собой полный квадрат двучлена, то уравнение задания 6 не обладает данным преимуществом. Поэтому при его решении необходимо провести полное исследование дискриминанта (квадратного трехчлена).

Задание 6. При всех значениях параметра а решить уравнение

$$(a-2)x^2-2ax=3-2a.$$

Преобразуем уравнение к стандартному виду

$$(a-2)x^2-2ax+2a-3=0$$

и применим к нему прием понижения степени.

Если a – 2 = 0, то a = 2, и уравнение принимает вид –4x + 1 = 0, откуда x = 0,25.

Если $a \neq 2$, то

$$\frac{D}{4} = a^2 - (a-2)(2a-3) = -a^2 + 7a - 6.$$

Исследуем дискриминант:

1. Если

$$-a + 7a - 6 \succ 0 \Leftrightarrow a^2 - 7a + 6 \prec 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a-1)(a-6) \prec 0 \Leftrightarrow 1 \prec a \prec 6,$$

то уравнение имеет два корня. Получили два новых контрольных значения параметра a: и

Если a = 1, то уравнение принимает вид

$$x^2 + 2x + 1 = 0,$$

откуда x = –1.

Если a = 6, то уравнение принимает вид

$$4x^2 - 12x + 5 = 0,$$

откуда x = 1,5.

Если 1 < a < 6, то

$$x = \frac{a \pm \sqrt{-a^2 + 7a - 6}}{a-2}.$$

Если

$$(a-1)(a-6) \succ 0,$$

то уравнение не имеет корней.

Ответы: $a = 1: x = -1; \quad a = 2: x = 0,25;$

$$a = 6: x = 1,5;$$

$$1 \prec a \prec 2 \ \text{и} \ 2 \prec a \prec 6;$$

$$x = \frac{a \pm \sqrt{-a^2 + 7a - 6}}{a-2};$$

$a \prec 1 \ \text{и} \ a \succ 6$: *решений нет*

Овладение новым приемом решения квадратных уравнений ставит вопрос о корректировке ООД решения квадратных уравнений с параметрами.

Предлагаемая методика построения ООД позволяет обучить школьников решению целого класса задач с параметрами, а совместное выделение приема нахождения контрольных значений готовит учащихся к осуществлению исследовательской деятельности, освоению профессионально значимых умений [1].

Список литературы:

1. Романов П.Ю. Технология воспитания педагога-исследователя в системе непрерывного образования // Научные труды МПГУ. Серия: Естественные науки. – 2001. – С. 290–294.

2. Романов П.Ю., Романова Т.Е. Решение задач с параметрами // Математика. Первое сентября. – 2001. – № 12. – С. 13–15.

3. Романов П.Ю., Романова Т.Е. Роль графической интерпретации результатов решения задач с параметрами организации исследовательской деятельности учащихся // Современные проблемы обучения математике в школе / ред. Е.И. Жилина. – Магнитогорск, 2000. – С. 84–90.

4. Романов П.Ю., Романова Т.Е. Системный подход в обучении учащихся написанию уравнения касательной к графику функции // Систематизация и обобщения при обучении школьников математике / под ред. Е.И. Жилиной. – Магнитогорск, 1998. – С. 36–41.

5. Романова Т.Е. Исследование систем линейных уравнений с двумя неизвестными и параметром // Педагогические аспекты математического образования / под ред. П.Ю. Романова. – Магнитогорск, 2011. – С. 112–117.

6. Романова Т.Е. Решение уравнений и неравенств первой степени. Уравнения и неравенства, содержащие переменную под знаком модуля: учебное пособие. – Магнитогорск, 2004. – 63 с.