Павлов Анатолий Тимофеевич

преподаватель математики

Областное государственное бюджетное образовательное учреждение среднего профессионального образования

«Иркутский авиационный техникум»

г. Иркутск

НЕКОТОРЫЕ ДОПОЛНЕНИЯ К ПОНЯТИЮ «ИРРАЦИОНАЛЬНОЕ ЧИСЛО»

Иррациональным называется число, которое можно выразить в форме бесконечной непериодической десятичной дроби. Например, иррациональными являются числа $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{9}$, числа *e*, π, синусы многих рациональных величин, логарифмы целых чисел и т.д. В отличие иррационального числа, любое *рациональное* число может быть записано в виде бесконечной периодической десятичной дроби, которую также можно представить обыкновенной дробью $\frac{p}{q}$, где p и q– целые числа, $q \neq 0$. Например, рациональные числа $1,(3)=\frac{4}{3}$, $2,(0)=\frac{2}{1}$, $2,(1)=\frac{19}{9}$, $0,35(0)=\frac{7}{20}$.

Введем некоторые дополнения к понятию *иррациональное число*. Рассмотрим на примере. Уравнение $x^2-3x+8=0$ имеет корни $x_{1,2}=\frac{3}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{41}$. Корни данного уравнения являются *иррациональными* числами, но каждое из данных иррациональных чисел представляет собой алгебраическую сумму *собственно* иррационального числа $\frac{1}{2}\sqrt{41}$ и *рационального* числа $\frac{3}{2}$. Собственно иррациональную составляющую $\frac{1}{2}\sqrt{41}$ назовем *чисто* иррациональным числом, выражение $\frac{3}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{41}$ назовем *составным* иррациональным числом.

Определение. *Иррациональное число, которое нельзя представить в виде алгебраической суммы другого иррационального числа и рационального числа назовем чисто иррациональным числом. Иррациональное число, которое можно представить в виде алгебраической суммы чисто иррационального числа и рационального числа назовем составным иррациональным выражением числом.*

Как уже отмечалось выше, $\frac{1}{2}\sqrt{41}$ – *чисто* иррациональное число, $\frac{3}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{41}$ – *составные* иррациональные числа.

Подразделение иррациональных чисел на чисто иррациональные числа и составные иррациональные числа предлагается в математике впервые. Можно провести аналогию в терминологии с комплексными числами, где комплексные числа вида $a+bi$ при $b\neq 0$ называются мнимыми, числа вида bi называются *чисто* мнимыми.

Составное иррациональное число может быть задано в неявном виде, в этом случае возникает необходимость представить иррациональное число в виде суммы рационального и чисто иррационального чисел. Примеры такого вида есть в курсе алгебры 9-го класса и встречаются в заданиях ЕГЭ по математике. Рассмотрим один из алгоритмов решения подобного вида задач на примерах.

Пример 1. Предположим, что $\sqrt{4+2\sqrt{3}}$ – составное иррациональное число. В таком случае представим его в виде $\sqrt{4+2\sqrt{3}}=q+\delta$, где q – рациональная, δ – чисто иррациональная составляющая числа. Так как $\sqrt{3}$ – чисто иррациональное, полагаем $\delta=a\sqrt{3}$. Отсюда запишем $\sqrt{4+2\sqrt{3}}=q+a\sqrt{3}$, возведем выражение во вторую степень, получим $4+2\sqrt{3}=q^2+2qa\sqrt{3}+3a^2$. Сумма рациональных составляющих $q^2+3a^2=4$, чисто иррациональные составляющие равны $2\sqrt{3}=2qa\sqrt{3}$. Решая полученные уравнения, находим $q=1$, $a=1$. В результате получаем $\sqrt{4+2\sqrt{3}}=1+\sqrt{3}$.

Пример 2. Покажем, что $\sqrt{14+6\sqrt{5}}$ – составное иррациональное число. Пусть $\sqrt{14+6\sqrt{5}}=q+\delta$, $\delta=a\sqrt{5}$. Отсюда $\sqrt{14+6\sqrt{5}}=q+a\sqrt{5}\Rightarrow 14+6\sqrt{5}=q^2+2qa\sqrt{5}+5a^2$. Рациональные составляющие: $q^2+5a^2=14$, чисто иррациональные составляющие: $6\sqrt{5}=2qa\sqrt{5}$. Решая полученные уравнения, находим $q=3$, $a=1$, окончательно запишем $\sqrt{14+6\sqrt{5}}=3+\sqrt{5}$.

На основании введенного разделения иррациональных чисел на *чисто* иррациональные и *составные* иррациональные сформулируем некоторые очевидные свойства иррациональных чисел.

1. Алгебраическая сумма чисто иррациональных выражений не может быть равна рациональному числу, кроме числа ноль

Например, пусть $\sqrt{7}-\sqrt{3}=\frac{p}{q}$, где $\frac{p}{q}$, где p и q – целые числа, $q\neq 0$. Возведем выражение во вторую степень, получим $10-2\sqrt{21}=\frac{p^2}{q^2}\Rightarrow\sqrt{21}=\frac{10q^2-p^2}{2q^2}$. Получили противоречие – чисто иррациональное число представлено обыкновенной дробью, следовательно $\sqrt{7}-\sqrt{3}\neq\frac{p}{q}$.

2. Алгебраическая сумма составного и чисто иррациональных чисел может равняться рациональному числу

Например, $\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{3}=\sqrt{(1+\sqrt{3})^2}-\sqrt{3}=1+\sqrt{3}-\sqrt{3}=1$.

3. Алгебраическая сумма составных иррациональных чисел может равняться рациональному числу

Например, а) $\sqrt{12+6\sqrt{3}}+\sqrt{4-2\sqrt{3}}=\sqrt{(3+\sqrt{3})^2}+\sqrt{(1-\sqrt{3})^2}=3+\sqrt{3}+1-\sqrt{3}=4$,

б) $\sqrt[3]{17\sqrt{5}+38}-\sqrt[3]{17\sqrt{5}-38}=\sqrt[3]{(\sqrt{5}+2)^3}-\sqrt[3]{(\sqrt{5}-2)^3}=\sqrt{5}+2-(\sqrt{5}-2)=4$.