Павлов Анатолий Тимофеевич

преподаватель математики

Областное государственное бюджетное образовательное учреждение среднего профессионального образования «Иркутский авиационный техникум»

г. Иркутск

К ВОПРОСУ РЕШЕНИЯ В НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЛАХ УРАВНЕНИЯ ВИДА $x^n + y^n = z^n$ ДЛЯ ЦЕЛЫХ $n \geq 2$

ВВЕДЕНИЕ

Предлагаемое исследование решений уравнения вида $x^n + y^n = z^n$ для показателей $n \geq 2$ непосредственно связано с проблемой доказательства теоремы Ферма, называемой “Большой теоремой Ферма” (она же “Великая” или “Последняя”). Свою знаменитую теорему Пьер Ферма (1601-1665) сформулировал около 1637 г. на полях "Арифметики" Диофанта Александрийского. В теореме утверждается: *не существует отличных от нуля целых чисел* x, y *и* z*, для которых* $x^n + y^n = z^n$*, где* $n > 2$. (При $n = 2$ такие числа существуют, например, 3,4,5). В бумагах Ферма было найдено доказательство теоремы при $n = 4$, единственное полное доказательство теоретико-числового результата, сохранившееся от Ферма. Относительно же общего случая $n > 2$, Ферма лишь написал на полях “Арифметики”, что он нашел “поистине замечательное доказательство” теоремы, но “поля слишком малы, чтобы его уместить”. С тех пор прошло более 3-х с половиной столетий, а теорема Ферма, точнее, теперь уже проблема Ферма все еще оставалась загадкой № 1 не только для любителей математики, но и математиков-профессионалов в теории чисел. Одно время, когда стали известны теоремы Гёделя о неполноте и непротиворечивости формальных систем, казалось, что проблема Ферма неразрешима, то есть упомянутую теорему нельзя ни доказать, ни опровергнуть. Однако вскоре было доказано, что доказательство теоремы

Ферма возможно и проблема Ферма вышла на новый виток. Отметим, что *традиционный** подход к доказательству теоремы Ферма основывался на следующем положении: "… если уравнению $x^n + y^n = z^n$ удовлетворяет тройка (x, y, z) целых чисел, то ему будет удовлетворять и любая тройка вида (kx, ky, kz), где k – произвольное целое число, справедливо и обратное утверждение. Поэтому, чтобы найти все решения уравнения $x^n + y^n = z^n$ в целых числах отличных от нуля, достаточно найти решения (x, y, z), где числа x, y, z взаимно просты, а чтобы доказать, что уравнение $x^n + y^n = z^n$ неразрешимо в целых числах, достаточно привести к противоречию предположение о существовании решения (x, y, z), состоящего из взаимно простых чисел. Более того, если в каком-нибудь решении (x, y, z) уравнения $x^n + y^n = z^n$ два из чисел x, y, z имеют общий множитель $k \neq \pm 1$, то третье число также будет делиться на k. Поэтому можно ограничиться лишь решениями, состоящими из попарно взаимно простых чисел. "Также, если теорема Ферма верна для показателя n, то она будет верна и для любого показателя λn, кратного n, потому что, если уравнение $u^{\lambda n} + v^{\lambda n} = w^{\lambda n}$ имеет целочисленное решение (u, v, w), то уравнение $x^n + y^n = z^n$ будет иметь целочисленное решение $(u^\lambda, v^\lambda, w^\lambda)$. Поэтому теорему Ферма достаточно доказать для $n = 4$ и для $n = l$, где l – произвольное *простое* число, $l \geq 3$" [1, с.22].

Подробное изложение истории доказательства теоремы Ферма и связанное с данной теоремой развитие теории алгебраических чисел можно найти в книгах: *Постников М.М.* Теорема Ферма. Введение в теорию алгебраических чисел – М.: Наука, 1978; *Постников М.М.* Введение в теорию алгебраических чисел – М.: Наука, 1982; *Эдвардс Г.* Последняя теорема Ферма. Генетическое введение в алгебраическую теорию чисел – М.: Мир, 1980.

* в данной статье предлагается отличное от традиционного исследование решений в натуральных числах уравнения $x^n + y^n = z^n$ для показателей $n \geq 2$.

Назовем некоторые основные этапы доказательства теоремы Ферма. Теорема при $n=3$ впервые была доказана Эйлером в 1768 году. К доказательству Эйлера можно привести следующий комментарий: ″... элементарного доказательства теоремы Ферма нет ни для одного показателя $n \neq 4$. Даже в случае $n=3$, который был рассмотрен Эйлером в 1768 г., оказались необходимыми соображения, использующие числа вида (1) $a+b\sqrt{-3}$, где a и b − целые числа. Такого рода методы были полностью чужды Ферма, и он их заведомо использовать не мог. Собственно говоря, доказательство Эйлера было дефектным, поскольку он без всякого обоснования перенес на числа вида (1) рассуждения, эксплуатировавшиеся до него лишь в области целых чисел. Например, он пользовался для чисел (1) простейшими фактами теории делимости, никак это не оправдывая. Первым, кто построил арифметику чисел (1) и, тем самым, подвел под рассуждения Эйлера надежный фундамент, был, по-видимому, Гаусс” [1, с.14]. “Доказательство теоремы Ферма для случая $n=5$ предложили в 1825 г. почти одновременно Лежен Дирихле и Лежандр. Свое доказательство Дирихле опубликовал в 1828 г. Оно было очень сложным. В 1912 г. его упростил Племель. Для следующего простого показателя $n=7$ теорема была доказана лишь в 1839 г. Ламе. Доказательство Ламе было почти сразу существенно усовершенствовано и упрощено Лебегом” [1, с.14]. Дальнейшие результаты в доказательстве теоремы Ферма принадлежат немецкому математику Куммеру. “В очень трудной работе 1858 года он доказал теорему Ферма для некоторого класса нерегулярных простых показателей, включающего показатели 37, 59 и 67. Тем самым теорема Ферма оказалась доказанной для всех простых показателей $l<100$” [1, с.17]. Хотя Куммеру не удалось получить доказательство теоремы Ферма для любого простого показателя n, но, занимаясь доказательством теоремы Ферма, Куммер добился выдающихся результатов, которые прославили его и породили целый ряд отделов современной алгебры, в частности, с его именем связано появление в математике понятий регулярных, куммеровых чисел”. “После Куммера серьезных сдвигов в доказательстве теоремы Ферма не произошло до 1929 г., когда Вандивер доказал, что *теорема Ферма справедлива для простого показателя l, если*: 1) *второй множитель* h_2 *числа* h *не делится на l;* 2) *числители* $l-3$ *чисел Бернулли* $B_{2l},\ B_{4l},\ldots,\ B_{2l(l-3)}$ *не делятся на* l^3 *".* Хотя полного доказательства теоремы Ферма так и не было получено, но можно заключить, что значение теоремы Ферма уже состоялось в том, что при попытках ее доказательства были созданы новые мощные средства, приведшие к созданию обширного раздела математики – теории алгебраических чисел.

О дальнейших этапах эволюции попыток доказать Великую теорему Ферма можно было судить лишь по некоторым известным из печати сообщениям по данной проблеме. Хотя появление таких сообщений в СССР было весьма проблематично – известно постановление ученого совета Математического института АН СССР (1987 г.) не рассматривать материалы, посвященные проблеме Ферма. (Хотелось бы провести некоторую параллель – в свое время Парижской академией наук было принято решение не рассматривать проекты по созданию *перпетуум мобиле*. Очевидно, ученый совет Математического института счел невозможность решения проблемы Ферма столь же научно обоснованным фактом, как и создание вечного двигателя). Конечно, после такого постановления ведущего учреждения страны в области математики ни один математический журнал не рискнет всерьез рецензировать какие-либо доказательства теоремы Ферма. А тем временем на Западе любые достижения в направлении возможного доказательства теоремы широко рекламировались (см., например, сообщения еженедельника "За рубежом" №9 за 1984 г., №13 за 1988 г.). Наконец, в газете "Известия" от 26 июня 1993 года появилась статья "Сенсация века: Великая теорема Ферма доказана": "… В мире произошла сенсация: профессор Эндрю Уайлс из Принстонского университета доказал Великую теорему Ферма, которую до него не могли доказать три столетия".

“23 июня 1993 года математик из Принстона Э. Уайлс, выступая на конференции по теории чисел в Кембридже (Великобритания), анонсировал доказательство гипотезы Таниямы для полустабильных эллиптических кривых. Тем самым он заявил, что доказал последнюю теорему Ферма. Дальнейшие события развивались довольно драматически. В начале декабря 1993 года, за несколько дней до того, как рукопись работы Уайлса должна была пойти в печать, в его доказательстве были обнаружены пробелы. Исправление их заняло свыше года. Текст с доказательством гипотезы Таниямы, написанный Уайлсом в сотрудничестве с Тейлором, вышел в свет летом 1995 года” (Гипотеза Таниямы и последняя теорема Ферма, Соловьев Ю.П., МГУ им. Ломоносова); “Теорема Ферма считается доказанной. Доказал ее профессор Принстона Э. Уайлс (Andrew Wiles) в 1995 году. Доказательство было опубликовано в журнале “Annals of Mathematics” стр. 443 – 551 под названием “Modular elliptic curves and Fermat’s Last Theorem”. Доказательство основано на применении теории модулярных эллиптических кривых. Этот метод получил свое начало еще в Диофантовой “*Арифметике*”. Взаимосвязь между теоремой Ферма и эллиптическими кривыми начинается в 1955 году, когда японский математик Ютака Танияма (1927 – 1958) сформулировал следующую гипотезу: *любая эллиптическая кривая, определенная над полем рациональных чисел, является модулярной*” (Что такое Великая теорема Ферма. ht, Freguently Asked Questions (FAQ); “25 октября 1994 года в математике произошло некое событие, столь великое, что эхо его докатилось и до непосвященных. Э. Уайлс доказал Великую Теорему Ферма. На самом деле было сделано нечто гораздо более важное: была доказана так называемая гипотеза Таниямы – Шимуры (двух выдающихся японских математиков) о единстве двух областей математики: теории модулярных форм и теории эллиптических кривых. Аналог этому событию, вероятно, можно найти лишь в создании Декартом аналитической геометрии – это крупнейший за последние века синтез математического знания. Теорема Ферма оказалась сравнительно несложным следствием произведенной Уайлсом научной революции. (Еще осенью 1984 года Г. Фрей вывел теорему Ферма из гипотезы Таниямы – Шимуры, но считалось, что доказать эту гипотезу труднее, чем Великую Теорему). Математика живет, она изменяется. Результат Уайлса – лишь шаг на пути удивительной метаморфозы, происходящей здесь" (Информационный сайт "Учительской газеты").

Итак, в конце XX века свершилось историческое событие в математике – доказана Великая теорема Ферма, и доказана отнюдь не элементарными средствами. Таким образом, проблему доказательства теоремы Ферма, которая волновала умы математиков (и не только математиков) в течение 3-х столетий, можно считать закрытой. Вопрос элементарного доказательства теоремы Ферма можно отнести в настоящее время только к истории математики и восстановлению исторической правды – действительно ли Ферма обладал доказательством своей теоремы, то есть возможно ли в принципе получить доказательство теоремы элементарными методами. Значит ли это, что нужно поставить под сомнение утверждение Ферма о том, что он обладал доказательством своей теоремы, если иметь в виду математический аппарат того времени, который должен был использовать Ферма при доказательстве теоремы? Пожалуй, на этот вопрос никогда не удастся ответить однозначно: "Пьер Ферма оставил потомкам запись о том, что он знает, как решить свою теорему. Могли его расчеты быть тождественны уайлсовским? Сам Уайлс считает, что нет: ученый, 360 лет тому назад бросивший вызов человеческой мысли, не мог знать то, что добыто в XX веке. Но Ферма, как считает выдающийся немецкий математик Ф. Клейн, мог найти доказательства благодаря какой-то простой, но очень удачной идее. Какой?" (Информационный бюллетень № 5.htn); "… главная загадка останется неразгаданной: записал бы гениальный француз доказательство своей последней теоремы, будь поля книги немного шире? Многие полагают, что Ферма после знаменитой победной реляции убедился, что потерпел неудачу –

несмотря на дьявольскую интуицию и выдающиеся математические способности. Если же Ферма справился с задачей – 300 лет до того, как появилось на свет предположение Таниямы, – то сделал это каким-то более прямым и математически элегантным способом. В любом случае деятельность “ферматистов” вряд ли сразу изживет себя” (“Техника – молодежи”, 1993, № 10, с.27, по материалам *Science News, The New York Times, Associated Press*).

Действительно, в настоящее время не прекращаются попытки получить доказательство теоремы Ферма, отличное от доказательства Уайлса, людьми, которых стали называть ферматистами. Свидетельством этому, можно назвать, движению ферматистов является большое количество различных вариантов доказательства теоремы Ферма, размещаемых в Интернете. На мой взгляд, причиной не прекращающихся попыток доказать теорему является неудовлетворенность не только любителей математики, но и отдельных профессиональных математиков доказательством Уайлса ввиду его большого объема – 150 страниц печатного текста, изложенного специальным математическим языком, мало доступным не только большинству интересующихся, но и высококлассным математикам. Но главной причиной является то, что доказательство Уайлса не является прямым и непосредственным.

Может быть, некоторым подтверждением тому, что возможны иные подходы к доказательству теоремы Ферма, отличные от традиционных, и, что Ферма мог иметь доказательство своей теоремы, послужит предлагаемое ниже исследование решений в натуральных числах уравнения $x^n + y^n = z^n$ для показателей $n \geq 2$. Новый подход к доказательству – это попытка автора, причисляющего себя к “ферматистам”, реализовать свои идеи общего доказательства теоремы с применением аппарата элементарной математики. Возможно, данные идеи не безошибочны, но не исключено, что объединение идей различных авторов, коллективная работа сможет, если не воспроизвести, но хотя бы приблизиться к возможным мыслям самого Ферма и восстановить историческую правду – показать, что Пьер Ферма не ошибался, когда заявлял, что он нашел доказательство своей теоремы. Остается только выразить сожаление, что в настоящее время научные математические инстанции России, так же, как и прежде ученый совет Математического института АН СССР, дистанцируются от предлагаемых проектов доказательства теоремы Ферма, но, уже мотивируя это тем, что имеется доказательство Э. Уайлса и иные доказательства по этой причине не подлежат рассмотрению.

О МЕТОДЕ ПОИСКА РЕШЕНИЙ В НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЛАХ УРАВНЕНИЯ $x^n + y^n = z^n$ ДЛЯ $n \geq 2$

Поиск решений в натуральных числах уравнения $x^n + y^n = z^n$ для показателей $n \geq 2$ непосредственно связан с проблемой доказательства теоремы Ферма.

Теорема Ферма: ***Не существует отличных от нуля целых положительных чисел*** x, y ***и*** z***, для которых*** $x^n + y^n = z^n$***, где*** $n > 2$ $(n = 3, 4, 5, \ldots)$.

Пусть x и y – натуральные числа. Из уравнения $x^n + y^n = z^n$ (1.1) следует $z = \sqrt[n]{x^n + y^n}$, при $x = y$ получаем иррациональное $z = \sqrt[n]{2}x$. Следовательно, будем рассматривать только, когда $x \neq y$, большее из них обозначим через x, то есть $x > y$, или $y < x < z$. Уравнение (1.1) можно записать в виде $y^n + x^n = (x + \Delta)^n$ (1.2), где $z = x + \Delta$. Зададим любые натуральные значения x и y, $x > y$. Уравнение (1.1) будет иметь решение в натуральных числах для заданных значений x и y, если только Δ будет натуральным числом. Анализируем, при каких возможных значениях показателя n уравнение (1.2) возможно будет иметь решения в натуральных числах. Разложим по формуле бинома Ньютона выражение (1.2) $y^n + x^n = (x + \Delta)^n$, где x и y любые заданные натуральные числа, $x > y$:

$$y^n + x^n = x^n + \frac{n}{1!}x^{n-1}\Delta + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}\Delta^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^{n-3}\Delta^3 + \ldots + \Delta^n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y^n = nx^{n-1}\Delta + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}\Delta^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^{n-3}\Delta^3 + \ldots + \Delta^n \quad (1.3).$$

Из (1.3) следует $0<\Delta<y$, а также $y^n>nx^{n-1}\Delta$, или $\Delta<\frac{y^n}{nx^{n-1}}$. Последнее выражение можно записать в виде $\Delta<\frac{y^{n-1}}{x^{n-1}}\frac{y}{n}$ (1.4). Так как $x>y$, то имеем $\frac{y^{n-1}}{x^{n-1}}<1$ и, если при этом $n\geq y$, то из (1.4) следует $0<\Delta<1$. В этом случае z не может являться натуральным числом.

Вывод 1.1. *Уравнение $x^n+y^n=z^n$, где x и y любые заданные натуральные числа, такие, что $x>y$, при $n\geq y$ не может иметь решений в натуральных числах. Следовательно, решения уравнения в натуральных числах следует искать только при $n<y$.*

Пусть Δ – натуральные числа в уравнении (1.1) $y^n+x^n=(x+\Delta)^n$. Обозначим $\Delta=k$, $k=1,2,3,\ldots$, запишем $y^n+x^n=(x+k)^n$ (1.5). В этом случае каждому натуральному y и k будет соответствовать какое-то значение x, обозначим его $x_k=x(y,k)$. Тогда уравнение (1.5) можно записать как $y^n+x_k^n=(x_k+k)^n$ (1.6), в случае натуральных значений x_k данное уравнение будет иметь решения в натуральных числах. Значения x_k уравнения (1.6) $y^n+x_k^n=(x_k+k)^n$, получаемые для какого-то заданного целого значения y при $k=1,2,3,\ldots$, можно принять за значения x уравнения (1.1) $x^n+y^n=z^n$. Заменим в (1.3) Δ на k и разделим обе части этого выражения на y^n, получим:

$1=n\frac{x_k^{n-1}}{y^n}k+\frac{n(n-1)}{2!}\frac{x_k^{n-2}}{y^n}k^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{x_k^{n-3}}{y^n}k^3+\ldots+\frac{k^n}{y^n}$ (1.7). Из (1.7) следует $n\frac{x_k^{n-1}}{y^n}k<1\Rightarrow x_k<\sqrt[n-1]{\frac{y^n}{kn}}$ (1.8). Отсюда границы значений x_k будут определяться неравенством $\sqrt[n-1]{\frac{y^n}{(k+1)n}}<x_k<\sqrt[n-1]{\frac{y^n}{kn}}$ (1.9), где $k=1,2,3,\ldots$, $y-$ натуральное число, $x_k>y$. Из (1.8) $x_k<\sqrt[n-1]{\frac{y^n}{kn}}$ также следует $\sqrt[n-1]{\frac{y^n}{kn}}>1$, так как, безусловно, $x_k>1$. Отсюда получаем $y>kn$ или $n<\frac{y}{k}$ (1.10).

В ы в о д 1.2. *Значения* x_k *уравнения* $y^n + x_k^n = (x_k + k)^n$ *должны удовлетворять неравенство* $\sqrt[n-1]{\frac{y^n}{(k+1)n}} < x_k < \sqrt[n-1]{\frac{y^n}{kn}}$, *где* $k = 1, 2, 3, \ldots$, $y -$ *любое натуральное число, такое, что* $x_k > y$ *и* $y > kn$.

Обозначим $\sqrt[n-1]{\frac{y^n}{kn}} = \bar{x}_k$ (1.11). Отсюда с учетом (1.8) можно записать $\bar{x}_k > x_k$ (1.12). Покажем на числовой оси возможные значения $\bar{x}_k$ и x_k. Натуральным значениям y и $k = 1, 2, 3, \ldots i$ соответствуют значения x_k: $x_1, x_2, x_3, \ldots x_i$, если среди таковых будут иметься натуральные x_k, то уравнение (1.1) будет иметь решения в натуральных числах. Если же таковых x_k нет, то соответственно уравнение (1.1) решений в натуральных числах иметь не будет.

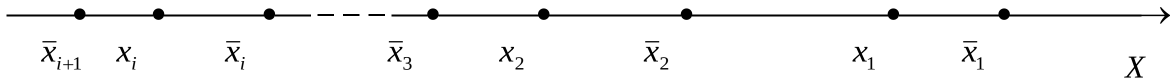

Рис. 1-1

Покажем, что существует единственное положительное значение x_k при заданных значениях y и k уравнения (1.6) $y^n + x_k^n = (x_k + k)^n$. Справедливость данного утверждения вытекает из следующего. Возведем правую часть уравнения (1.6) в степень n и приведем к виду

$$n x_k^{n-1} k + \frac{n(n-1)}{2!} x_k^{n-2} k^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} x_k^{n-3} k^3 + \ldots + k^n - y^n = 0 \quad (1.13).$$

Обозначив показатель степени $n - 1 = m$, а коэффициенты через $a_0, a_1, \ldots a_{m-1}$ и $k^n - y^n = a_m$, получим: $a_0 x_k^m + a_1 x_k^{m-1} + \ldots + a_{m-1} x_k + a_m = 0$ (1.14). Полученное уравнение является действительным алгебраическим уравнением степени m с неизвестным x_k, коэффициенты уравнения являются действительными числами, в случае $k = 1, 2, 3, \ldots$ это будут рациональные числа. Существует способ отделения действительных корней алгебраического уравнения вида (1.14) – правило Декарта: число положительных корней действительного уравнения (1.14) либо равно числу N перемен знаков в последовательности $a_0, a_1, \ldots a_m$

коэффициентов (причем, коэффициенты, равные нулю, не учитываются), либо меньше числа N на четное число. Если перемен знаков нет, то уравнение вида (1.14) положительных корней не имеет, если есть одна перемена знака, то имеется в точности один положительный корень. В данном случае имеем дело с переменой знака один раз: $a_m = k^n - y^n < 0$, так как $y > kn$, остальные коэффициенты положительные. Следовательно, уравнение (1.14), а также и (1.13) имеет один положительный корень, то есть каждому натуральному значению k и y в уравнении (1.3) $y^n + x_k^n = (x_k + k)^n$ будет соответствовать одно положительное значение x_k.

Общие формулы, выражающие корни алгебраического уравнения через его коэффициенты, как известно, существуют только для уравнений 2, 3 и 4-ой степеней. Поскольку выражение (1.13) является уравнением степени $m = n-1$, то его корни можно найти по общим формулам только для $m = n-1 = 1, 2, 3, 4$ или для $n = 2, 3, 4, 5$. Решения уравнения (1.6) $y^n + x_k^n = (x_k + k)^n$ относительно x_k для показателей $n = 2$ и $n = 3$ будут определяться соответственно формулами:

$n = 2$, $x_k = \frac{y^2}{2k} - \frac{k}{2}$ (1.15) и $n = 3$, $x_k = \sqrt{\frac{y^3}{3k} - \frac{k^2}{12}} - \frac{k}{2}$ (1.16). Иллюстрируем полученные выводы примерами отыскания решений уравнения (1.1):

Пример 1-1. В уравнении (1.6) $y^n + x_k^n = (x_k + k)^n$ возьмем $n = 2$ и $y = 10$.

Из условия (1.10) $kn < y$ следует, что $k = 1, 2, 3, 4$. Из $y^2 + x_k^2 = (x_k + k)^2$ имеем $x_k = \frac{y^2}{2k} - \frac{k}{2}$. Из условия (1.11) $\sqrt[n-1]{\frac{y^n}{kn}} = \bar{x}_k$ получаем верхнюю границу корней $\bar{x}_k = \frac{y^2}{2k}$. Для данного примера это будут: $x_k = \frac{10^2}{2k} - \frac{k}{2}$, $\bar{x}_k = \frac{10^2}{2k}$. Вычисленные по этим формулам значения занесем в таблицу:

Таб. 1-1

n	y	k	$\bar{x}_k$	x_k
2	10	1	50	49,5
		2	25	**24**
		3	16,66…	15,16…
		4	12,5	10,5

Итак, уравнение $10^2 + x_k^2 = (x_k + k)^2$ или то же самое уравнение $10^2 + x^2 = z^2$ имеет единственное решение в целых числах: $10^2 + 24^2 = 26^2$, то есть $x = 24$, $y = 10$, $z = 26$. Покажем полученные значения x_k и $\bar{x}_k$ на числовой оси:

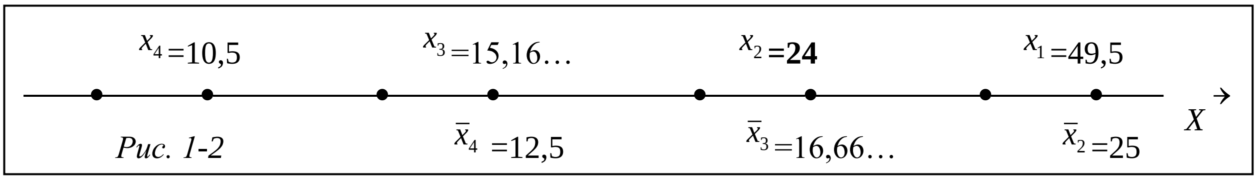

Рис. 1-2

Отметим, что, если имеем дробные $\bar{x}_k$ – в данном примере это 49,5; 15,1(6)=$\frac{91}{6}$; 49,5, то, избавляясь от знаменателя, можно получить решение уравнения в целых числах при других значениях y и k: $10^2 + \left(\frac{91}{6}\right)^2 = \left(\frac{91}{6} + 3\right)^2 \Rightarrow 60^2 + 91^2 = 109^2$, где будут $y = 60$, $k = 18$, $x_k = 91$.

Пример 1-2. Возьмем $n = 2$ и $y = 100$. Так как $x_k = \frac{y^2}{2k} - \frac{k}{2}$ и $\bar{x}_k = \frac{y^2}{2k}$, отсюда $x_k = \bar{x}_k - \frac{k}{2}$, уравнение (1.6) при $n = 2$ можно записать в виде $y^2 + \left(\bar{x}_k - \frac{k}{2}\right)^2 = \left(\bar{x}_k + \frac{k}{2}\right)^2$ (1.17), при $y = 100$ будет $100^2 + \left(\bar{x}_k - \frac{k}{2}\right)^2 = \left(\bar{x}_k + \frac{k}{2}\right)^2$.

Целые значения x_k можно получить при $\bar{x}_k = \frac{y^2}{2k} = \frac{100^2}{2k}$ и $k = 2, 4, 8, 10$.

Таб. 1-2

n	y	k	$\bar{x}_k$	x_k	z_k
2	100	2	2500	2499	2501
		4	1250	1248	1252
		8	625	621	629
		10	500	495	505

Таким образом, для данного примера получены некоторые из возможных целых решений уравнения $x^2 + y^2 = z^2$:

$$2499^2 + 100^2 = 2501^2, \quad 1248^2 + 100^2 = 1252^2,$$
$$621^2 + 100^2 = 629^2, \quad 495^2 + 100^2 = 505^2.$$

Примечание:

Известно, что решения уравнения $x^2 + y^2 = z^2$ в целых числах представляют собой тройки Пифагоровых чисел: $x = m^2 - p^2$, $y = 2mp$, $z = m^2 + p^2$, где m и p – действительные числа. Для целых чисел из *примера 1-1*: $24^2 + 10^2 = 26^2$ это будут $m = \sqrt{18}$, $p = \sqrt{8}$.

Пример 1-3. В уравнении $y^n + x_k^n = (x_k + k)^n$ возьмем $n = 3$ и $y = 12$.

Из условия (1.10) $kn < y$ следует $k = 1, 2, 3$. Значения $\bar{x}_k$ и x_k находим по формулам $\bar{x}_k = \sqrt[n-1]{\frac{y^n}{kn}} = \sqrt{\frac{12^3}{3k}}$, $x_k = \sqrt{\frac{y^3}{3k} - \frac{k^2}{12}} - \frac{k}{2}$. Результаты вычислений занесем в таблицу:

Таб. 1-3

y	n	k	$\bar{x}_k$	x_k
12	3	1	24	23,49…
		2	16,97…	15,96…
		3	13,85…	12,32…

Отсюда следует, что уравнение $12^3 + x^3 = z^3$ решений в целых числах не имеет.

В ы в о д 1.3. *Поиск решений уравнения* $x^n + y^n = z^n$ *в натуральных числах представляем следующим образом*:

уравнение приводим к виду $y^n + x_k^n = (x_k + k)^n$. *Задавая любое натуральное значение y, находим значения* x_k *при* $k = 1,2,3,...$ *и выполнении условия* $x_k > y > kn$, *отсюда также следует множество значений* $z_k = x_k + k$ *уравнения (в данном случае нахождение* x_k *по формулам возможно только для* n=*2,3,4,5).*

Полученное множество значений x_k, *соответствующее заданным целым значениям* y *и* $k = 1,2,3,...$ *удовлетворяет условие* $\sqrt[n-1]{\frac{y^n}{(k+1)n}} < x_k < \sqrt[n-1]{\frac{y^n}{kn}}$.

Если среди множества значений x_k *окажутся натуральные числа, исходное уравнение* $x^n + y^n = z^n$ *будет иметь решения в натуральных числах.*

В заключение выполним некоторое обобщение полученных результатов исследования уравнения (1.1) $x^n + y^n = z^n$. Уравнение (1.1) $x^n + y^n = z^n$ приводим к виду (1.6) $y^n + x_k^n = (x_k + k)^n$, а затем к виду (1.13) $nx_k^{n-1}k + \frac{n(n-1)}{2!}x_k^{n-2}k^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x_k^{n-3}k^3 + ... + k^n - y^n = 0$, где y и $k = 1,2,3,...$ – натуральные числа, $y > kn$. Решая уравнение (1.13) относительно x_k, получаем при различных значениях показателя n:

а) $n = 2$, $x_k = \frac{y^2}{2k} - \frac{k}{2}$, выражение не содержит радикалов, все значения x_k – рациональные числа;

б) $n = 3$, $x_k = \sqrt{\frac{y^3}{3k} - \frac{k^2}{12}} - \frac{k}{2}$, выражение содержит квадратный корень и, как известно, все значения x_k – иррациональные числа.

Покажем, что в общем случае для любого $n \geq 2$ действительный положительный корень x_k можно представить в виде $x_k = \sqrt[n-1]{\frac{y^n}{kn} - P_{k(n)}} - \frac{k}{2}$ (1.18), где $P_{k(2)} = 0$ при $n = 2$ и $P_{k(3)} = \frac{k^2}{12}$ при $n = 3$. Выражение (1.13) разделим на kn, прибавим и вычтем в левой части $\frac{k^{n-1}}{2^{n-1}}$, получим:

$$x_k^{n-1} + \frac{(n-1)}{2!} x_k^{n-2} k + \frac{(n-1)(n-2)}{3!} x_k^{n-3} k^2 + \ldots + \frac{k^{n-1}}{n} - \frac{y^n}{kn} - \frac{k^{n-1}}{2^{n-1}} + \frac{k^{n-1}}{2^{n-1}} = 0 \quad (1.19).$$

Данное уравнение будет равносильно уравнению (1.13) и, как было показано выше, будет иметь один действительный положительный корень. Частичную сумму в выражении (1.19) обозначим

$S_{k(n)} = \frac{(n-1)}{2!} x_k^{n-2} k + \frac{(n-1)(n-2)}{3!} x_k^{n-3} k^2 + \ldots + \frac{k^{n-1}}{n} - \frac{k^{n-1}}{2^{n-1}}$, выражение примет вид $x_k^{n-1} + S_{k(n)} - \frac{y^n}{kn} + \frac{k^{n-1}}{2^{n-1}} = 0 \Rightarrow x_k = \sqrt[n-1]{\frac{y^n}{kn} - S_{k(n)} - \frac{k^{n-1}}{2^{n-1}}}$. Из данного выражения следует неравенство $x_k > \sqrt[n-1]{\frac{y^n}{kn} - S_{k(n)}} - \frac{k}{2}$, получение равенства возможно при некотором $P_{k(n)} < S_{k(n)}$, отсюда получим формулу $x_k = \sqrt[n-1]{\frac{y^n}{kn} - P_{k(n)}} - \frac{k}{2}$ (1.20). В этом случае также будет выполняться $z_k = x_k + k = \sqrt[n-1]{\frac{y^n}{kn} - P_{k(n)}} + \frac{k}{2}$ и уравнение (1.6) $y^n + x_k^n = (x_k + k)^n$ примет вид:

$$y^n + \left[\sqrt[n-1]{\frac{y^n}{kn} - P_{k(n)}} - \frac{k}{2}\right]^n = \left[\sqrt[n-1]{\frac{y^n}{kn} - P_{k(n)}} + \frac{k}{2}\right]^n \quad (1.21).$$

Каждым натуральным значениям y и k в данном уравнении будет соответствовать определенное значение $P_{k(n)}$. Так, решая уравнение относительно переменной $P_{k(n)}$, найдем ранее известные $P_{k(2)} = 0$ при $n = 2$ и $P_{k(3)} = \frac{k^2}{12}$ при $n = 3$.

При $n = 4$ уравнение (1.21) приводится к виду $4k\left(\frac{y^4}{4k} - P_{k(4)}\right) + k^3 \sqrt[3]{\frac{y^4}{4k} - P_{k(4)}} - y^4 = 0$, которое можно решать относительно $P_{k(4)}$ и выразить $P_{k(4)}$ через y и k

формулами. При $n=5$ уравнение (1.21) приводится к уравнению 4-ой степени относительно переменной $P_{k(5)}$, решая которое, можно также выразить $P_{k(5)}$ через y и k формулами. Для получения $P_{k(6)}$ и далее, как известно, нет формул, по которым можно было бы выразить переменную $P_{k(n)}$ в общем виде через коэффициенты уравнения. На основании выше изложенного делаем вывод:

В ы в о д 1.4. *В уравнении* $y^n + x_k^n = (x_k + k)^n$ *для показателей* $n \geq 2$ *можно* x_k *привести к виду* $x_k = \sqrt[n-1]{\frac{y^n}{kn} - P_{k(n)}} - \frac{k}{2}$. *Для получения целых значений* x_k *необходимо, чтобы значения* $P_{k(n)}$ *в данной формуле являлись рациональными числами.*

Отметим, что при $n=3$ необходимое условие не является достаточным, хотя $P_{k(3)} = \frac{k^2}{12}$ и является рациональным числом, но, как известно, уравнение $y^n + x^n = z^n$ при $n=3$ решений в натуральных числах не имеет.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ ФЕРМА ДЛЯ ПОКАЗАТЕЛЯ *n* = 3 ЭЛЕМЕНТАРНЫМ МЕТОДОМ

В уравнении $y^n + x^n = z^n$ "… числа x, y и z можем считать попарно взаимно простыми. Поэтому, в частности, только одно из них может быть четным" [1, с.35]. В дальнейшем будем ссылаться на это свойство.

Выше было показано, что уравнение (1.1) $y^n + x^n = z^n$ можно представить в виде (1.6) $y^n + x_k^n = (x_k + k)^n$. При $n=3$ это будет $y^3 + x_k^3 = (x_k + k)^3$ (2.1), где $x_k > y > 3k$, y и k – натуральные числа. Решая это уравнение относительно x_k, получим $x_{1,2} = -\frac{k}{2} \pm \sqrt{\frac{y^3}{3k} - \frac{k^2}{12}} = -\frac{k}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4y^3 - k^3}{3k}}$. Так как решения уравнения (1.1) ищем в натуральных числах, будем брать только арифметические значения $x_k > 0$, то есть $x_k = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4y^3 - k^3}{3k}} - \frac{k}{2}$ (2.2), где $k = 1, 2, 3, \ldots$, y – любое натуральное число, для которого выполняется $y > kn \Rightarrow y > 3k$. Анализируем условия, при которых x_k в выражении (2.2) может принимать натуральные значения: а) если k – *четное число,* то для того чтобы x_k было целым числом, необходимо, чтобы $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4y^3-k^3}{3k}}$ также было целым числом, примем $\sqrt{\frac{4y^3-k^3}{3k}}=F$ (2.3), где F – четное число;

б) k – *нечетное число.* В этом случае для получения целых значений x_k необходимо выполнение равенства $\sqrt{\frac{4y^3-k^3}{3k}}=f$ (2.4), где f – нечетное число.

В обоих случаях “а” и “б” значения y могут быть как четными, так и нечетными.

Рассмотрим все возможные комбинации значений y и k при их четности или нечетности и определим, какими при этом могут быть значения x_k, чтобы затем сделать заключение о возможности или невозможности получения решений в натуральных числах уравнения (2.1), а отсюда и уравнения (1.1) при $n=3$.

I. Пусть y – *нечетное,* k – *четное.* Предполагаем, что в уравнении $y^n+x_k^n=(x_k+k)^n$ значение x_k – нечетное, в этом случае получаем $x_k+k=z_k$ также нечетное, в таком случае y должно быть четным, что противоречит начальному условию y – нечетное. Если же x_k – четное, то $x_k+k=z_k$ будет также четным, отсюда получаем y – четное, что противоречит условию y – нечетное. Итак, в данном случае x_k не может быть натуральным числом.

В ы в о д 2.1. *При y – нечетном и k – четном уравнение $y^n+x_k^n=(x_k+k)^n$ решений в натуральных числах не имеет для всех $n\geq 2$.*

II. Пусть y – *четное,* k – *нечетное.* В этом случае при x_k – четном получаем $x_k+k=z_k$ нечетное и при x_k – нечетном получаем $x_k+k=z_k$ четное. Отсюда в уравнении $y^n+x_k^n=(x_k+k)^n$ в первом случае сумма двух четных чисел равна нечетному числу, во втором случае сумма четного и нечетного чисел равна четному числу. Выполнение таких равенств исключено.

В ы в о д 2.2. *При* y *– четном и* k *– нечетном уравнение* $y^n + x_k^n = (x_k + k)^n$ *решений в натуральных числах не имеет для всех* $n \geq 2$.

III. y и k *– нечетные числа.* В этом случае в уравнении $y^n + x_k^n = (x_k + k)^n$ при x_k нечетном получаем z_k – четное и при x_k четном получаем z_k – нечетное, то есть условие, что только одно из чисел x, y, z является четным, выполняется. Для получения натуральных значений x_k при $n = 3$ и k – нечетном, необходимо выполнение равенства (2.4) $\sqrt{\dfrac{4y^3 - k^3}{3k}} = f$, где f должно быть также нечетным числом. В этом случае формула (2.2) примет вид $x_k = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{4y^3 - k^3}{3k}} - \dfrac{k}{2} = \dfrac{f}{2} - \dfrac{k}{2}$.

Подставляя данное выражение x_k в формулу (1.6), получим $y^3 + \left(\dfrac{f}{2} - \dfrac{k}{2}\right)^3 = \left(\dfrac{f}{2} + \dfrac{k}{2}\right)^3$ (2.5), где f и y – натуральные нечетные числа, для которых из условия $x_k > y$ должно выполняться $f > 2y + k$. Из (2.5), или непосредственно из (2.4) следует $k^3 + 3f^2k - 4y^3 = 0$ (2.6). Если при заданных нечетных значениях f и y в уравнении (2.6) решениями будут нечетные значения k, то уравнение (2.5) $y^3 + \left(\dfrac{f}{2} - \dfrac{k}{2}\right)^3 = \left(\dfrac{f}{2} + \dfrac{k}{2}\right)^3$, а отсюда и уравнение (1.6) $y^3 + x_k^3 = (x_k + k)^3$ будут иметь решения в натуральных числах, в противном случае уравнения (2.5) и (1.6) решений в натуральных числах иметь не будут. На этом основании формулируем свойства корней уравнений (1.6) $y^3 + x_k^3 = (x_k + k)^3$ и (2.6) $k^3 + 3f^2k - 4y^3 = 0$.

Свойство 2.1. *Необходимым и достаточным условием получения натуральных значений* x_k *в уравнении* $y^3 + x_k^3 = (x_k + k)^3$, *где* y *и* k *– натуральные нечетные числа,* $y > 3k$, *является решение в нечетных числах относительно* k *уравнения* $k^3 + 3f^2k - 4y^3 = 0$, *где* f *и* y *– натуральные нечетные числа, для которых выполняется условие* $f > 2y + k$.

Переходим к рассмотрению решения уравнения (2.6) $k^3+3f^2k-4y^3=0$ относительно переменной k. Уравнение (2.6) является кубичным уравнением вида $\bar{x}^3+a\bar{x}^2+b\bar{x}+c=0$, где $\bar{x}=k, a=0,\ b=3f^2,\ c=-4y^3$. (В кубичном уравнении взято обозначение $\bar{x}$, чтобы избежать путаницы со значением x в уравнении (1.1)). Корни $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$ кубичного уравнения описываются формулами Кардано:

$$\bar{x}_1=-\frac{a}{3}+A+B\ ,\quad \bar{x}_{2,3}=-\frac{a}{3}-\frac{A+B}{2}\pm i\frac{A-B}{2}\sqrt{3}\ ,\ \text{где}$$

$$A=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{Q}},\quad B=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{Q}},\quad Q=\left(\frac{p}{3}\right)^3+\left(\frac{q}{2}\right)^2.$$

Если $Q>0$, кубичное уравнение имеет один действительный и два сопряженных комплексных корня, если $Q=0$, то уравнение имеет три действительных корня, два из которых, по крайней мере, равны и, если $Q<0$, уравнение будет иметь три действительных различных корня. Находим решения уравнения (2.6):

$$p=-\frac{a^2}{3}+b=3f^2,\ q=2\left(\frac{a}{3}\right)^3-\frac{ab}{3}+c=-4y^3,$$

$$Q=\left(\frac{p}{3}\right)^3+\left(\frac{q}{2}\right)^2=\left(\frac{3f^2}{3}\right)^3+\left(\frac{-4y^3}{2}\right)^2=f^6+4y^6$$

В данном случае имеем $Q>0$, следовательно, уравнение (2.6) будет иметь один действительный и два сопряженных комплексных корня. Поскольку нас интересует решение уравнения (2.1) в целых положительных числах, будем находить только действительный корень по формулам:

$$A=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{Q}}=\sqrt[3]{2y^3+\sqrt{f^6+4y^6}}\ ,\quad B=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{Q}}=\sqrt[3]{2y^3-\sqrt{f^6+4y^6}},$$

$$k=A+B=\sqrt[3]{2y^3+\sqrt{f^6+4y^6}}+\sqrt[3]{2y^3-\sqrt{f^6+4y^6}}\quad (2.7).$$

Для краткости записи обозначим $f^6+4y^6=d$ (2.8), отсюда решение уравнения (2.6) $k^3+3f^2k-4y^3=0$ окончательно запишется в виде $k=\sqrt[3]{\sqrt{d}+2y^3}-\sqrt[3]{\sqrt{d}-2y^3}$ (2.9), где y и f – положительные нечетные числа,

$\sqrt{d}-2y^3>0$. Характер значений k требуется определить. Рассмотрим все возможные варианты получения значений k в уравнении (2.9) $\sqrt[3]{\sqrt{d}+2y^3}-\sqrt[3]{\sqrt{d}-2y^3}=k$:

1) $\sqrt[3]{\sqrt{d}+2y^3}$ и $\sqrt[3]{\sqrt{d}-2y^3}$ – натуральные числа. Поскольку в данном случае $d=f^6+4y^6$ – нечетное, то отсюда будут $\sqrt[3]{\sqrt{d}+2y^3}=\textit{нечетн.}$ и $\sqrt[3]{\sqrt{d}-2y^3}=\textit{нечетн.}$. Из (2.9) следует $\textit{нечетн.}-\textit{нечетн.}=\textit{четн.}$, то есть получение нечетных k исключается. Следовательно, в данном случае уравнение $y^3+x_k^3=(x_k+k)^3$ не будет иметь решений в натуральных числах при нечетных y и k.

2) Одно из выражений $\sqrt[3]{\sqrt{d}+2y^3}$, или $\sqrt[3]{\sqrt{d}-2y^3}$ натуральное число, другое – иррациональное, отсюда значения k будут иррациональными, уравнение (2.6) и уравнение $y^3+x_k^3=(x_k+k)^3$ не будут иметь решений в натуральных числах при нечетных y и k.

3) Оба выражения $\sqrt[3]{\sqrt{d}+2y^3}$ и $\sqrt[3]{\sqrt{d}-2y^3}$ – иррациональные.

Введем некоторые дополнения к понятию “иррациональное выражение (число)”. Рассмотрим на примере:

уравнение $x^2-3x+8=0$ имеет корни $x_{1,2}=\frac{3}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{41}$. Корни данного уравнения являются *иррациональными* числами, но каждое из данных иррациональных чисел представляет собой алгебраическую сумму *собственно* иррационального числа $\sqrt{41}$ и *рационального* $\frac{3}{2}$.

Определение 2.1. *Иррациональное выражение (число), которое нельзя представить в виде алгебраической суммы другого иррационального выражения (числа) и рационального выражения (числа) назовем чисто иррациональным выражением (числом). Иррациональное выражение (число), которое можно представить в виде алгебраической суммы чисто иррационального выражения (числа) и рационального выражения (числа) назовем составным иррациональным выражением (числом).*

В данном примере $\sqrt{41}$ – *чисто* иррациональное число, $\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{41}$ – *составные* иррациональные числа.

Примечание: *Разделение иррациональных выражений (чисел) на ”чисто иррациональные выражения (числа)” и ”составные иррациональные выражения (числа)” вводится в математике впервые.*

Составное иррациональное выражение (число) может быть задано в неявном виде, например, $\sqrt{4+2\sqrt{3}} = \sqrt{(1+\sqrt{3})^2} = 1+\sqrt{3}$. На основании введенного разделения иррациональных выражений (чисел) на *чисто* иррациональные и *составные* иррациональные сформулируем некоторые очевидные свойства иррациональных выражений (чисел).

Свойства 2.2.

1) Алгебраическая сумма чисто иррациональных выражений (чисел) не может быть равна рациональному выражению (числу), кроме числа ноль.

Пример 2-1. $\sqrt{7} - \sqrt{3} = q$, $q \notin R$; $\sqrt[3]{17} - \sqrt[3]{17} = 0$.

2) Алгебраическая сумма составного и чисто иррациональных выражений (чисел) может быть равна рациональному выражению (числу).

Пример 2-2. $\sqrt{4+2\sqrt{3}} - \sqrt{3} = \sqrt{\left(1+\sqrt{3}\right)^2} - \sqrt{3} = 1+\sqrt{3}-\sqrt{3} = 1$.

3) Алгебраическая сумма составных иррациональных выражений (чисел) может быть равна рациональному выражению (числу).

Пример 2-3. $\sqrt{12+6\sqrt{3}} + \sqrt{4-2\sqrt{3}} = \sqrt{\left(3+\sqrt{3}\right)^2} + \sqrt{\left(1-\sqrt{3}\right)^2} = 3+\sqrt{3}+1-\sqrt{3} = 4$.

Пример 2-4. Найдем разность двух иррациональных выражений $\sqrt[3]{17\sqrt{5}+38}$ и $\sqrt[3]{17\sqrt{5}-38}$. Каждое из данных выражений является составным иррациональным выражением $\sqrt[3]{17\sqrt{5}+38} = \sqrt[3]{\left(\sqrt{5}+2\right)^3} = \sqrt{5}+2$ и $\sqrt[3]{17\sqrt{5}-38} = \sqrt[3]{\left(\sqrt{5}-2\right)^3} = \sqrt{5}-2$.

Отсюда их разность будет целым числом $\sqrt[3]{17\sqrt{5}+38} - \sqrt[3]{17\sqrt{5}-38} = 4$.

Вернемся к выражению $\sqrt[3]{\sqrt{d}+2y^3}-\sqrt[3]{\sqrt{d}-2y^3}=k$, где в данном случае $\sqrt[3]{\sqrt{d}+2y^3}>0$ и $\sqrt[3]{\sqrt{d}-2y^3}>0$– иррациональные выражения. Проверяем, может ли в данном случае k быть натуральным (нечетным) числом.

а) Пусть одно из слагаемых составное, другое чисто иррациональное выражения: $\sqrt[3]{\sqrt{d}+2y^3}=k+\delta$, $\sqrt[3]{\sqrt{d}-2y^3}=\delta$, где $\delta>k$ – чисто иррациональное выражение. Возведем оба выражения в третью степень и вычтем из первого второе, получим $\delta^2+k\delta-\frac{4y^3-k^3}{3k}=0$. Корни данного уравнения $\delta_{1,2}=-\frac{k}{2}\pm\sqrt{\left(-\frac{k}{2}\right)^2+\frac{4y^3-k^3}{3k}}$. Поскольку по условию δ – чисто иррациональное, рациональная составляющая корней должна равняться нулю $\frac{k}{2}=0$, получили противоречие так как $k\neq 0$;

б) пусть $\sqrt[3]{\sqrt{d}+2y^3}=\delta$ и $\sqrt[3]{\sqrt{d}-2y^3}=\delta-k$, $\delta>k$. Возведем оба выражения в третью степень и вычтем из первого выражения второе. Получим $4y^3=3\delta^2k-3\delta k^2+k^3$, в левой части выражения имеем целое число, в правой – иррациональное, равенство не выполняется, то есть данный случай получения целых k также исключается;

в) оба слагаемых $\sqrt[3]{\sqrt{d}+2y^3}=\delta_1$ и $\sqrt[3]{\sqrt{d}-2y^3}=\delta_2$– чисто иррациональные выражения. Отсюда получаем иррациональное $k=\delta_1-\delta_2$;

в) оба слагаемых $\sqrt[3]{\sqrt{d}+2y^3}$ и $\sqrt[3]{\sqrt{d}-2y^3}$– составные иррациональные выражения. Из условия получения целых значений k предположим, что $\sqrt[3]{\sqrt{d}+2y^3}=\delta+a$ и $\sqrt[3]{\sqrt{d}-2y^3}=\delta-b$, где a и b – рациональные, а δ – чисто иррациональное выражение. В этом случае получим $\sqrt[3]{\sqrt{d}+2y^3}-\sqrt[3]{\sqrt{d}-2y^3}=\delta+a-\delta+b=a+b=k$, то есть при условии рациональных a и b в данном случае получаем рациональное значение k. Возведем $\sqrt[3]{\sqrt{d}+2y^3}=\delta+a$ и

$\sqrt[3]{\sqrt{d}-2y^3}=\delta-b$ в третью степень и вычтем из первого полученного выражения второе, получим квадратное уравнение:

$$\delta^2+(a-b)\delta+\frac{a^3+b^3-4y^3}{3(a+b)}=0 \ (2.10).$$

Корни уравнения $\delta_{1,2}=-\frac{a-b}{2}\pm\sqrt{\left(-\frac{a-b}{2}\right)^2-\frac{a^3+b^3-4y^3}{3(a+b)}}$ (2.11). С учетом принятого условия δ – чисто иррациональное выражение, рациональная составляющая корней должна быть равна нулю, то есть $-\frac{a-b}{2}=0$. Отсюда и с учетом, что $a+b=k$, получим $a=b=\frac{k}{2}$. Иррациональные выражения запишутся в виде $\sqrt[3]{\sqrt{d}+2y^3}=\delta+\frac{k}{2}$ и $\sqrt[3]{\sqrt{d}-2y^3}=\delta-\frac{k}{2}$. Формула (2.11) примет вид $\delta_{1,2}=\pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{16y^3-k^3}{3k}}$ (2.12), из данной формулы следует $k^3+12\delta^2k-16y^3=0$ (2.13).

Сравним полученное уравнение (2.13) с исходным уравнением (2.6) $k^3+3f^2k-4y^3=0$, которое имеет относительно k решение $k=\sqrt[3]{\sqrt{d}+2y^3}-\sqrt[3]{\sqrt{d}-2y^3}$. Уравнение (2.13) нельзя привести к виду исходного уравнения (2.6), но уравнение (2.13) получили, исходя из предположения, что $\sqrt[3]{\sqrt{d}+2y^3}$ и $\sqrt[3]{\sqrt{d}-2y^3}$ можно представить в виде $\sqrt[3]{\sqrt{d}+2y^3}=\delta+\frac{k}{2}$ и $\sqrt[3]{\sqrt{d}-2y^3}=\delta-\frac{k}{2}$, значит, такой вид представления данных выражений исключается. Отсюда заключаем, что в результате всего исследования, значение k, определяемое выражением $k=\sqrt[3]{\sqrt{d}+2y^3}-\sqrt[3]{\sqrt{d}-2y^3}$, не только не является нечетным числом, но вообще не является рациональным числом, то есть k – иррациональное число. И, наоборот, при k натуральном имеем x_k – иррациональное.

Вывод 2.3. *При нечетных* y *и* k *уравнение* $y^3+x_k^3=(x_k+k)^3$ *решений в натуральных числах не имеет, в данном случае* x_k *может принимать только иррациональные значения.*

Рассмотрим последний из возможных вариантов комбинации значений y, k.

IY. y и k – *четные числа.*

Как отмечалось ранее, в уравнении $y^3+x^3=z^3$ только одно из чисел x, y и z может быть четным числом. Поэтому, поскольку заведомо задаем четное y, то x_k и $z_k=x_k+k$ в уравнении $y^3+x_k^3=(x_k+k)^3$ должны быть нечетными числами. Для четных y и k можно записать $y=2^M Y$, $k=2^N K$, где Y и K – нечетные числа, $M=1, 2, 3, ...$, $N=1, 2, 3, ...$

Корень x_k уравнения $y^3+x_k^3=(x_k+k)^3$ находим по формуле (2.2) $x_k=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4y^3-k^3}{3k}}-\frac{k}{2}$, анализируем возможность получения *нечетных* значений x_k при $y=2^M Y$ и $k=2^N K$. Уравнение $y^3+x_k^3=(x_k+k)^3$ примет вид $(2^M Y)^3+x_k^3=(x_k+2^N K)^3$ (2.13). Подставляя в (2.2) значения $y=2^M Y$ и $k=2^N K$, получим $x_k=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2^{3M+2}Y^3-2^{3N}K^3}{3\cdot 2^N K}}-\frac{2^N K}{2}$ (2.14).

Пусть $N=1$, из (2.14) получим $x_k=\sqrt{\frac{2^{3M-1}Y^3-K^3}{3K}}-K$, отсюда следует при условии получения целых значений корней $\textit{нечет.}=\textit{нечет.}-\textit{нечет.}$. Равенство не выполняется, получение нечетных x_k исключено.

Проверяем возможность получения нечетных значений x_k при $N>1$. Если $N\geq 3M+2$, то из (2.14) следует $x_k=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{Y^3-2^{3N-3M-2}K^3}{3\cdot 2^{N-3M-2}K}}-2^{N-1}K$, отсюда следует $\textit{нечет.}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\textit{нечет.}}{\textit{чет.или нечет.}}}-\textit{чет.}\Rightarrow \textit{нечет.}=(\textit{чет. или нечет.})\cdot \textit{чет.}$ Равенство не выполняется, получение нечетных x_k исключается.

Рассмотрим случай, когда $1 < N < 3M + 2$. В этом случае формулу (2.14) можно записать в виде $x_k = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2^{3M+2-N}Y^3 - 2^{2N}K^3}{3K}} - 2^{N-1}K$. При $3M = N$ получим $x_k = \sqrt{\frac{Y^3 - 2^{6M-2}K^3}{3K}} - 2^{3M-1}K$, отсюда не исключается возможность получения нечетных значений x_k: *нечет.* = *нечет.* − *чет.*. Из формулы (2.13) $(2^M Y)^3 + x_k^3 = (x_k + 2^N K)^3$ при $N = 3M$ следует $(2^M Y)^3 + x_k^3 = (x_k + 2^{3M} K)^3$ (2.15). Решение данного уравнения $x_k = \sqrt{\frac{Y^3 - 2^{6M-2}K^3}{3K}} - 2^{3M-1}K$ (2.16). Из предположения x_k – нечетное число следует, что значение $F = \sqrt{\frac{Y^3 - 2^{6M-2}K^3}{3K}}$ (2.17) также должно быть нечетным числом. В (2.16) и (2.17) каждому из значений $M = 1, 2, 3, \ldots$ должна соответствовать (находиться) пара значений Y и K при которых x_k и F должны быть натуральными (нечетными) числами. Из условия $x_k > 2^M Y$ также должно выполняться $F > 2^M Y + 2^{3M-1}K$. Из (2.17) получим $K^3 + \frac{3F^2}{2^{6M-2}}K - \frac{4 \cdot Y^3}{2^{6M}} = 0$ (2.18). Далее прибегнем к тому же способу доказательства, который был применен ранее при рассмотрении решений уравнения $y^3 + x_k^3 = (x_k + k)^3$ в случае нечетных y и k.

Свойство 2.3. *Необходимым условием получения натуральных значений* x_k *в уравнении* $(2^M Y)^3 + x_k^3 = (x_k + 2^{3M} K)^3$, *где* Y *и* K *– натуральные нечетные числа,* $2^M Y > 3 \cdot 2^{3M} K$, $M = 1, 2, 3, \ldots$ *является решение в натуральных нечетных числах относительно* K *уравнения* $K^3 + \frac{3F^2}{2^{6M-2}}K - \frac{4 \cdot Y^3}{2^{6M}} = 0$, *где* F *и* Y *– натуральные нечетные числа, для которых выполняется* $F > 2^M Y + 2^{3M-1}K$.

Обозначив в уравнении (2.18) $K = k$, $\frac{F^2}{2^{6M-2}} = f^2$ и $\frac{Y^3}{2^{6M}} = y^3$, приходим к виду ранее полученного уравнения (2.6) $k^3 + 3f^2 k - 4y^3 = 0$, решение которого относительно переменной k получено выше и задано формулой (2.9)

$k=\sqrt[3]{\sqrt{d}+2y^3}-\sqrt[3]{\sqrt{d}-2y^3}$, где $f^6+4y^6=d$. Выполнив обратную замену в формуле (2.9) согласно принятым выше обозначениям k, f^2 и y^3, получим

$$2^{3M-1}K=\sqrt[3]{\sqrt{F^6+2^{6M-4}Y^6}+2^{3M-2}Y^3}-\sqrt[3]{\sqrt{F^6+2^{6M-4}Y^6}-2^{3M-2}Y^3} \quad (2.19).$$

Обозначив $F^6+2^{6M-4}Y^6=D$, запишем выражение (2.19) в сокращенном виде

$$\sqrt[3]{\sqrt{D}+2^{3M-2}Y^3}-\sqrt[3]{\sqrt{D}-2^{3M-2}Y^3}=2^{3M-1}K \quad (2.20).$$

Полученное выражение есть выражение вида (2.9) $\sqrt[3]{\sqrt{d}+2y^3}-\sqrt[3]{\sqrt{d}-2y^3}=k$, которое анализировалось выше для нечетных y и k с условием получения целых (нечетных) значений k. Все этапы предыдущего доказательства для выражения (2.9) применимы и для данного выражения (2.20), кроме случая, когда оба слагаемые $\sqrt[3]{\sqrt{D}+2^{3M-2}Y^3}$ и $\sqrt[3]{\sqrt{D}-2^{3M-2}Y^3}$ – нечетные числа. В этом случае в выражении (2.20) возможно выполнение равенства $нечет.-нечет.=чет.$. Для выполнения этого условия необходимо, чтобы выполнялось: 1) $\sqrt{D}$ – целое (нечетное) число, то есть корень извлекается, 2) $\sqrt{D}+2^{3M-2}Y^3=N^3$ (2.21), где N – нечетное число. В таком случае выражение (2.21) можно привести к виду $y^3+x_k^3=(x_k+k)^3$. Так как $\sqrt{D}>2^{3M-2}Y^3$, выполняя условие $x_k>y_k$, полагаем $\sqrt{D}=x_k^3=\tilde{x}_k^3$, $y^3=2^{3M-2}Y^3$ (взяли обозначение $x_k=\tilde{x}_k$, чтобы не путать со значением x_k в формуле (2.16)), если $\tilde{x}_k$ будет натуральным числом, то это будет нечетное число. Соответственно получаем уравнение $2^{3M-2}Y^3+\tilde{x}_k^3=(\tilde{x}_k+k)^3$, отсюда $(2^MY)^3+(\sqrt[3]{2^2}\tilde{x}_k)^3=(\sqrt[3]{2^2}\tilde{x}_k+\sqrt[3]{2^2}k)^3$. Из условия получения решений уравнения в целых числах полагаем $\sqrt[3]{2^2}k=2^{3M}K_1$, где K_1 – нечетное число. Берем значение k именно в виде $k=2^{3M}K_1$, так как при других четных значениях k выше было доказано, что уравнение вида $y^3+x_k^3=(x_k+k)^3$ не имеет решений в натуральных числах. В итоге получаем уравнение $(2^MY)^3+(\sqrt[3]{2^2}\tilde{x}_k)^3=(\sqrt[3]{2^2}\tilde{x}_k+2^{3M}K_1)^3$ (2.22). Решением данного уравнения будет $\sqrt[3]{2^2}\tilde{x}_k=\sqrt{\dfrac{Y^3-2^{6M-2}K_1^{\,3}}{3K_1}}-2^{3M-1}K_1$ (2.23). Если предположить, что $\tilde{x}_k$

иррациональное и кратное $\sqrt[3]{2}$, то получим равенство, которое не выполняется $четн. = нечетн.$, следовательно, остаются варианты – $\tilde{x}_k$ либо нечетное число, либо иррациональное не кратное $\sqrt[3]{2}$. В любом из этих случаев $\sqrt[3]{2^2}\tilde{x}_k$ будет иррациональным числом. Сравним выражение (2.23) с выражением (2.16) $x_k = \sqrt{\dfrac{Y^3 - 2^{6M-2}K^3}{3K}} - 2^{3M-1}K$. В (2.16) каждому из значений $M = 1, 2, 3, \ldots$ должна соответствовать (находиться) пара значений Y и K при которых x_k должно быть натуральным (нечетным) числом. В таком случае, в выражении (2.23) тем же значениям $M = 1, 2, 3, \ldots$ и Y должны соответствовать равные значения $K_1 = K$, отсюда получаем равенство выражений (2.16) и (2.23). Из равенства данных выражений следует $x_k = \sqrt[3]{2^2}\tilde{x}_k$, то есть получили x_k – иррациональное число, отсюда делаем вывод – при четных значениях $y = 2^M Y$ и $k = 2^{3M}K$ уравнение $(2^M Y)^3 + x_k^3 = (x_k + 2^{3M}K)^3$ решений в натуральных числах не имеет. Делаем общий вывод для рассмотренного случая IY.

Вывод 2.4. *При четных y и k уравнение $y^3 + x_k^3 = (x_k + k)^3$ решений в натуральных числах не имеет.*

На основании *выводов 2.1 – 2.4* заключаем:

Уравнение $x^n + y^n = z^n$ при $n = 3$ решений в натуральных числах не имеет.

Очевидно, что, если x_k при некотором n в уравнении $y^n + x_k^n = (x_k + k)^n$ не может принимать целые значения, то x_k не может быть также и рациональной дробью, так как в таком случае, избавляясь от знаменателя дроби, получим решение уравнения в целых числах для других значений y и k при том же показателе n.

Отметим, что согласно *выводам 2.1 и 2.2* при y – нечетном и k – четном, а также при y – четном и k – нечетном, значения x_k в уравнении $y^n + x_k^n = (x_k + k)^n$ не могут быть натуральными числами при любом $n \geq 2$ и, следовательно, в данных случаях уравнение $y^n + x^n = z^n$ решений в натуральных числах не имеет для всех $n \geq 2$. *Для получения полного доказательства теоремы Ферма остается получить доказательства для* $n > 3$*, когда числа а)* y *и* k *– оба нечетные и б)* y *и* k *– оба четные.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Постников М.М. Введение в теорию алгебраических чисел. – М.: Наука, 1982.